DAS RAMIREZSCHE INTEGRAL UND DIE LÖSUNG DER GLEICHUNG $\bar{\partial} f = \alpha$ IM BEREICH DER BESCHRÄNKTEN FORMEN

von Hans Grauert und Ingo Lieb*

Einleitung

Das Cauchysche Integral der Funktionentheorie einer Veränderlichen zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

1) *Ist f eine in $\bar{G}$ stetige und in G holomorphe Funktion, so gilt*

$$f(y) = \int_{\partial G} \Omega_y(x) f(x) \textit{ für } y \in G.$$

2) *Ist $h(x)$ eine stetige Funktion auf ∂G, so ist*

$$f(y) = \int_{\partial G} \Omega_y(x) h(x)$$

eine in G holomorphe Funktion.

3) *Es ist* $\int_G |\Omega_y(x)| \, d\lambda(x) \leqq L$
mit L als einer von y unabhängigen Konstanten. Der Kern hat nur im Punkt $x = y$ eine Singularität.

Hierbei bezeichnet $G \subset \boldsymbol{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rande, und es ist

$$\Omega_y(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dx}{x - y}$$

und

$$\int_G |\Omega_y(x)| \, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{1}{|x - y|} \, d\lambda(x)$$

gesetzt.

Die ersten entsprechenden Integralformeln, die in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher bekannt wurden, waren die Formel von Bergman-

* Author who presented paper.

Weil und die Formel von Martinelli. Die Eigenschaft 1) ist für beide Formeln erfüllt, jedoch muß man bei Bergman und Weil nur über die ausgezeichneten Randflächen integrieren. Das ist bei der Anwendung der Stokesschen Formel hinderlich. Die Integralformel gilt auch nur für Gebiete, die ausgezeichnete Randflächen besitzen. Die Eigenschaft 2) gilt im Falle "Bergman-Weil," jedoch gilt sie nicht bei Martinelli. Dagegen ist bei Martinelli die Eigenschaft 3) richtig, im Falle der Bergman-Weilschen Formel ist sie wieder falsch.

Inzwischen waren in den Arbeiten von Leray und Norguet die Cauchy-Fantappié-Integralformeln entwickelt worden. Es gelang dann E. Ramirez de Arellano, unter Verwendung der Theorie kohärenter analytischer Garben zu zeigen, daß es zu jedem beschränkten streng pseudokonvexen Gebiet $G \subset C^n$ mit glattem Rand Cauchy-Fantappié-Formeln gibt, die die Eigenschaften 1) und 2) besitzen und bei denen der Kern $\Omega_y(x)$ eine Singularität wie bei Martinelli hat. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß für den Kern auch die unter 3) formulierte Abschätzung gilt, wenn der Ramirezsche Kern geeignet definiert wird. Diese Abschätzung ist gerade für die Untersuchung der Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$, in der α eine $\bar{\partial}$-geschlossene (0,1)-Form und f eine Funktion bedeuten, von ausschlaggebender Bedeutung. Man kann nämlich jetzt zeigen: *Ist α beschränkt, so kann man auch f als beschränkt wählen, und es gilt eine Abschätzung für $|f|$*. (Vielleicht kann man sogar Abschätzungen von f in der $C_{r-1+\varepsilon}$-Norm erhalten, wenn α in $C_{r+\varepsilon}$ ist.) Jedenfalls ergibt sich schon aus unserem Resultat eine interessante Aussage für die Čechsche Cohomologie: *Ist $\hat{\mathfrak{U}}$ eine offene Überdeckung von $\bar{G}$, bezeichnet $\mathfrak{U}$ die offene Überdeckung $\hat{\mathfrak{U}} \cap G$ und ist $\mathfrak{c}$ ein beschränkter Cozyklus aus $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, so gilt $\mathfrak{c} = \delta\mathfrak{c}'$ mit $\mathfrak{c} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $|\mathfrak{c}'| \leqq K|\mathfrak{c}|$. Dabei ist K eine von $\mathfrak{c}$ unabhängige Konstante.*

§1. *Die Ramirezsche Integralformel*

Wir berichten zunächst über einige Resultate einer Arbeit von E. Ramirez [5].

Es sei $G \subset\subset C^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit beliebig oft differenzierbarem glattem Rand ∂G. Es gibt dann eine in einer Umgebung U^{**} von ∂G erklärte streng plurisubharmonische C^∞-Funktion ϕ mit $d\phi \neq 0$ in U^{**} und

$$G \cap U^{**} = \{x \in U^{**}: \phi(x) < 0\}.$$

In [5] hat E. Ramirez gezeigt:

Satz 1. *Es gibt Umgebungen U von ∂G und V von $\bar{G}$ und eine für alle $(x, y) \in U \times V$ erklärte C^∞-Funktion g mit folgenden Eigenschaften:*

a) *g ist holomorph in y.*

b) *Für $(x, y) \in \partial G \times \bar{G}$ und $x \neq y$ ist $\operatorname{Re} g(x, y) > 0$.*

c) *$g(x, x) = 0$.*

Wegen Eigenschaft c läßt sich (siehe [5]) g in der Form

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) g_i(x, y)$$

darstellen, wobei die g_i beliebig oft differenzierbar und holomorph in y sind. Wählt man eine Umgebung U_1 von ∂G mit $U_1 \subset\subset U$, setzt man $U^* = U \cup G$ und $N = \{(x, y) \in \bar{U}_1 \times G\colon \operatorname{Re} g(x, y) \leqq 0\}$, so läßt sich eine Funktion ψ auf $U^* \times G$ mit folgenden Eigenschaften finden:

a) ψ is unendlich oft differenzierbar.

b) $0 \leqq \psi \leqq 1$.

c) Es gibt Umgebungen W_1 von $\partial G \times G$ und W_2 von $N \cup ((U^* - U_1) \times G)$ mit $\psi \mid W_1 \equiv 1$ und $\psi \mid W_2 \equiv 0$.

Man setzt dann

$$g_i' = \psi g_i + (1 - \psi)(\bar{x}_i - \bar{y}_i), \tag{1}$$

$$g'(x, y) = \psi g(x, y) + (1 - \psi) \cdot \| x - y \|^2, \tag{2}$$

wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm bezeichnet, und bildet die Differentialform

$$\Omega_y(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} g_\nu' \bigwedge_{\substack{\mu = 1 \cdots n \\ \mu \neq \nu}} \bar{\partial}_x g_\mu' \wedge \bigwedge_{\lambda = 1, \ldots, n} dx_\lambda}{g'(x, y)^n}. \tag{3}$$

Dann gilt die Ramirezsche Integralformel:

Satz 2 [5]. *$\Omega_y(x)$ ist für $x \neq y$ unendlich oft differenzierbar und hat die folgenden Eigenschaften:*

a) *$d_x \Omega_y(x) = 0$ für $x \neq y$.*

b) *$\bar{\partial}_y \Omega_y(x) = 0$ in einer Umgebung von $\partial G \times G$.*

c) *Für jede auf $\bar{G}$ holomorphe Funktion f und jeden Punkt $y \in G$ ist*

$$f(y) = \int_{\partial G} f(x) \Omega_y(x).$$

Der Kern $\Omega_y(x)$ ist durch die Eigenschaften a, b und c nicht eindeutig festgelegt. Diese Tatsache werden wir in den folgenden Paragraphen aus-nutzen, um durch geeignete Wahl von g und ψ einen Kern zu finden, für den sich zusätzlich L^1-Abschätzungen aufstellen lassen.

§2. *Abschätzung von* $g(x, y)$

1. Der Beweis von Satz 1 liefert noch

Hilfssatz 1. *Für* $y \in U(\partial G)$ *läßt sich die Darstellung*

$$(4) \qquad g(x,y) = 2 \sum_i (x_i - y_i)\phi_i(x) - \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_{ij}(x) + c \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_i(x)\phi_j(x) + O(\| x - y \|^3)$$

erreichen.

Dabei ist c eine reelle Konstante, und es wurde

$$\phi_i(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad \text{usw.}$$

gesetzt. Nach [*5*, pp. 22, 23] gilt nämlich

$$g(x,y) = \sum_i \chi^i(x) g^i(x,y);$$

die $\chi^i(x)$ sind eine C^∞-Teilung der 1.

$$g^i(x,y) = P_x(y)/(1 + P_x(y)(h^i(x,y) - c^i)),$$

$$P_x(y) = 2 \sum_i (x_i - y_i)\phi_i(x) - \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_{ij}(x).$$

Die Funktionen $h^i(x,y)$ sind holomorph in y, unendlich oft differenzierbar in x und können so gewählt werden, daß ihre Taylorentwicklung mit Gliedern 2-ter Ordnung in $(x - y)$ beginnt. Unabhängig von i kann man $c^i = c$ setzen, da die c^i beliebig verkleinert werden dürfen. Einsetzen in die Gleichung für $g(x, y)$ liefert die Behauptung.

Für das folgende ist es notwendig, ϕ noch geeignet zu wählen.

Hilfssatz 2. *Es gibt eine streng plurisubharmonische Funktion* ϕ *in einer Umgebung* U' *von* ∂G *mit* $d\phi \neq 0$ *und* $G \cap U = \{x \in U : \phi(x) < 0\}$, *für die gilt: Ist* L *eine in* x_0 *senkrechte Gerade auf* ∂G, *so schneidet* L *in einer Umgebung von* x_0 *alle Niveauflächen* $\{x : \phi(x) = c\}$ *senkrecht.*

Beweis. Für $x \in \mathbf{C}^n$ sei $\delta(x)$ die minimale Entfernung zwischen x und ∂G. Wir setzen

$$\tau(x) = \begin{cases} -\delta(x) & \text{für } x \in G, \\ \delta(x) & \text{für } x \notin G. \end{cases}$$

In einer Umgebung von ∂G ist τ unendlich oft differenzierbar und auf ∂G bedingt streng plurisubharmonisch. Für hinreichend großes $A > 0$ ist dann

$$\phi(x) = \tau(x)e^{A\tau(x)}$$

streng plurisubharmonisch in einer Umgebung von ∂G [2, pp. 262–264] und hat dieselben Niveauflächen wie τ. ϕ leistet offenbar das Verlangte.

Wir werden von jetzt an stets mit dem obigen ϕ als (globaler) Randfunktion arbeiten. Die Mengen $\{x : |\phi(x)| < \delta\}$ bilden für $\delta \to 0$ offenbar eine Umgebungsbasis von ∂G. Wir wählen $U = \{x \in U' : |\phi(x)| < \delta_0\} \subset\subset U'$.

2. Es sei (mit den Bezeichnungen von Satz 1) $y \in \overline{U \cap G}$. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß y die Koordinaten

$$y = (x_1' = -\rho_0, x_1'' = 0, \cdots, x_n'' = 0), \qquad \rho_0 \geqq 0,$$

bekommt, daß $0 \in \partial G$ ist und die Ebene $x_1' = 0$ tangential in 0 an ∂G verläuft. r sei die euklidische Distanz in der Tangentialebene vom Ursprung, $R = \| x - y \|$ die im $\mathbf{C}^n$ von y. Schließlich werde für $0 \leqq \rho \leqq \rho_0$

$$F_\rho = \{x \in \bar{U} : \phi(x) = \phi(\rho - \rho_0, 0, \cdots, 0)\}$$

gesetzt.

3. Für $\phi(y)$ findet man in x die Entwicklung

$$\begin{aligned}(5)\quad \phi(y) = \phi(x) &- \sum_i (x_i - y_i)\phi_i(x) - \sum_i (\bar{x}_i - \bar{y}_i)\phi_{\bar{i}}(x) \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_{ij}(x) + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} (\bar{x}_i - \bar{y}_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j)\phi_{\bar{i}\bar{j}}(x) \\ &+ \sum_{i,j} (x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j)\phi_{i\bar{j}}(x) + O(\| x - y \|^3).\end{aligned}$$

Einsetzen von (4) in (5) liefert

$$\begin{aligned}\phi(y) = \phi(x) &- \mathrm{Re}\,\Big(g(x,y) - c \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_i(x)\phi_j(x)\Big) \\ &+ \sum_{i,j} (x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j)\phi_{i\bar{j}}(x) + O(\| x - y \|^3)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}(6)\qquad \mathrm{Re}\, g(x,y) = \phi(x) - \phi(y) &+ \mathrm{Re}\,\Big(c \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\phi_i(x)\phi_j(x)\Big) \\ &+ \sum_{i,j} (x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j)\phi_{i\bar{j}}(x) + O(\| x - y \|^3).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\phi_i(x) = \phi_i(y) + O(\| x-y \|),$$

$$\phi_i(y) = 0 \quad \text{für } i \neq 1 \text{ nach Konstruktionen von } \phi.$$

Damit wird aus (6):

$$\operatorname{Re} g(x,y) = \phi(x) - \phi(y) + \operatorname{Re}(c\phi_1(y)^2(x_1-y_1)^2) + \sum_{i,j} (x_i-y_i)(\bar{x}_j-\bar{y}_j)\phi_{ij}(x) + O(\| x-y \|^3). \tag{7}$$

4. Es gibt Konstanten $A_1, A_2, \cdots > 0$, so daß gilt:

$$A_1 \leqq \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right| \leqq A_2 \tag{8}$$

auf $\bar{U}$ (dabei ist $\partial\phi/\partial n$ die Ableitung von ϕ in Richtung der Normalen auf der Niveaufläche von ϕ);

$$\sum_{i,j} \phi_{ij}(x) t_i \bar{t}_j \geqq A_3 \| t \|^2 \tag{9}$$

für $x \in \bar{U}$ und $t \in \mathbf{C}^n$. Das Restglied in (7) läßt sich abschätzen durch

$$\left| O(\| x-y \|^3) \right| \leqq A_4 \| x-y \|^3 . \tag{10}$$

Durch $\rho(x) = \sigma = \phi(\sigma - \rho_0, 0, \cdots, 0)$, falls $x \in F_\sigma$, ist eine differenzierbare Funktion σ erklärt, für die aus der Taylorformel die Darstellung

$$\rho(x) = x_1' - y_1' + O(\| x-y \|^2)$$

folgt. Das Restglied in dieser Formel genügt einer Ungleichung

$$\left| O(\| x-y \|^2) \right| \leqq A_5 \| x-y \|^2 . \tag{11}$$

5. Jetzt läßt sich $\operatorname{Re} g$ nach unten abschätzen. Es sei $x \in F_\rho$, $\rho \geqq 0$. Dann ist $\phi(x) = \phi(\rho - \rho_0, 0, \cdots, 0)$ und nach (8)

$$\phi(x) - \phi(y) \geqq A_1 \rho . \tag{12}$$

Für den vierten Term in (7) erhält man nach (9):

$$\sum_{i,j} \phi_{ij}(x)(x_i-y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \geqq A_3 R^2 . \tag{13}$$

Weiter ist

$$\left| x_1 - y_1 \right|^2 = \left| x_1' - y_1' \right|^2 + \left| x_1'' \right|^2,$$

$$\left| x_1' - y_1' \right|^2 \leqq 2\rho^2 + 2A_5^2 R^4 \quad \text{(nach (11))}.$$

Damit gilt für den dritten Term in (7):

(14) $|c|\,|\mathrm{Re}(\phi_1^2(y))(x_1-y_1)^2| \leqq |c|\,|\phi_1(y)|^2(|x_1''|^2+2\rho^2+2A_5^2R^4).$

$$\leqq \tfrac{1}{4}|c|A_2^2|x_1''|^2+\tfrac{1}{2}|c|A_2^2\rho^2+\tfrac{1}{2}|c|A_2^2A_5^2R^4.$$

Einsetzen von (10), (12), (13) und (14) in (7):

$$|\mathrm{Re}\, g(x,y)| \geqq A_1\rho + A_3R^2 - \tfrac{1}{4}|c|A_2^2|x_1''|^2 - \tfrac{1}{2}|c|A_2^2\rho^2$$
$$- \tfrac{1}{2}A_2^2A_5^2|c|R^4 - A_4R^3.$$

Alle auftretenden Konstanten sind von x und y unabhängig. Für $\rho \leqq \rho_1$ und $R \leqq R_1$ wird somit mit positiven Konstanten B_1 and B_2

$$|\mathrm{Re}\, g(x,y)| \geqq B_1R^2 - B_2|x_1''|^2. \tag{15}$$

R_1 ist natürlich von ρ_1 unabhängig.

6. Wir behandeln nun den Imaginärteil von g. Nach (4) ist

$$\begin{aligned} i\,\mathrm{Im}\, g(x,y) &= \tfrac{1}{2}(g(x,y)-\bar{g}(x,y)) \\ &= \sum_i (x_i-y_i)\phi_i(x) - \sum_i(\bar{x}_i-\bar{y}_i)\phi_i(x) + O(\|x-y\|^2). \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von ϕ_i liefert

$$i\,\mathrm{Im}\, g(x,y) = \sum_i (x_i-y_i)\phi_i(y) - \sum_i(\bar{x}_i-\bar{y}_i)\phi_i(y) + O(\|x-y\|^2),$$

und weiter nach Konstruktion von ϕ

$$\mathrm{Im}\, g(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1'}(y)x_1'' + O(\|x-y\|^2). \tag{16}$$

Wir wählen eine positive Konstante A_6, so daß für das Restglied in (16)

$$|O(\|x-y\|^2)| \leqq A_6\|x-y\|^2$$

gilt und erhalten unter Berücksichtigung von (8)

$$|\mathrm{Im}\, g(x,y)| \geqq A_1|x_1''| - A_6R^2. \tag{17}$$

7. (15) und (17) zusammen ergeben für g:

$$\begin{aligned} |g(x,y)| &\geqq \max(|\mathrm{Re}\, g(x,y)|,\ |\mathrm{Im}\, g(x,y)|) \\ &\geqq \max(B_1R^2 - B_2|x_1''|^2, A_1|x_1''| - A_6R^2) \\ &\geqq \max(B_1R^2, A_1|x_1''| - A_6R^2) - B_2|x_1''|^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Nun gilt für α, β, $\gamma > 0$:

$$\max(\alpha, \beta - \gamma) \geqq \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha + \beta). \tag{19}$$

Beweis. Ist $\alpha \geqq \beta - \gamma$, so setzen wir

$$\alpha = \frac{\alpha}{2\alpha + \gamma}(2\alpha + \gamma) = \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha + \alpha + \gamma) \geqq \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha + \beta);$$

es sei nun $\beta - \gamma \geqq \alpha$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha + \gamma)^2 &\leqq \beta(\alpha + \gamma) \\
\alpha^2 &\leqq \alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma \\
\alpha^2 + \alpha\beta &\leqq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma \\
\alpha(\alpha + \beta) &\leqq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma) \\
\frac{\alpha}{2\alpha + \gamma}(\alpha + \beta) &\leqq \beta - \gamma \\
\frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}}(\alpha + \beta) &\leqq \beta - \gamma .
\end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt also die Ungleichung.

Aus (19) folgt die auch für $R = 0$ oder $|x_1''| = 0$ gültige Beziehung:

$$\max(B_1 R^2, A_1 |x_1''| - A_6 R^2) \geqq \frac{1}{2 + \frac{A_6}{B_1}}(A_1 |x_1''| + B_1 R^2),$$

also liefert (18) mit geeigneten neuen Konstanten C_1, C_2:

$$|g(x,y)| \geqq C_1 |x_1''| + C_2 R^2 - B_2 |x_1''|^2 .$$

Indem man R_1 und damit $|x_1''|$ klein genug wählt, erhält man hieraus mit einer neuen Konstanten C_3:

$$|g(x,y)| \geqq C_3 |x_1''| + C_2 R^2 .$$

Wir formulieren diese Ergebnisse als

Hilfssatz 3. *Es sei δ_0 hinreichend klein und $U = \{x : |\phi(x)| < \delta_0\}$. Dann existieren Konstanten R_1, C_2, C_3, so daß für $y \in \overline{U \cap G}$, $\|x - y\| = R < R_1$ und $\phi(x) > \phi(y)$ die Ungleichung*

$$|g(x,y)| \geqq C_2R^2 + C_3|x_1''| \tag{20}$$

besteht. (Dabei sind die Koordinaten wie in Abschnitt 2 zu wählen.)

§3. *Abschätzung von $\psi(x,y)$ und $d_x\psi(x,y)$*

1. Wir behalten die bisherigen Bezeichnungen bei. Die Funktion g ist also auf $U' \times G$ definiert, und es gilt $U = \{x: |\phi(x)| < \delta_0\} \subset\subset U'$. Wie in §1 sei

$$U^* = U' \cup G,$$

$$N = \{(x,y) \in \bar{U} \times G\colon \operatorname{Re} g(x,y) \leqq 0\}.$$

Aus E. Ramirez' Konstruktion von g ergibt sich

Hilfssatz 4. *Falls* $\operatorname{Re} g(x,y) \leqq 0$ *ist, so ist* $\phi(x) \leqq \phi(y)$.

Da die Niveauflächen von ϕ mit denen von τ übereinstimmen, gilt dieselbe Aussage auch für die Distanzfunktion τ aus §2; ferner gibt es Zahlen $\varepsilon_1 < 0$ und $\varepsilon_2 > 0$, so daß $U = \{x \in U' : \varepsilon_1 < \tau(x) < \varepsilon_2\}$ ist.

2. Wir wählen eine monotone und auf $[0,1]$ streng monotone C^∞-Funktion f auf $\mathbf{R}$ mit $0 \leqq f \leqq 1$, $f(t) \equiv 0$ für $t \leqq 0$, $f(t) \equiv 1$ für $t \geqq 1$. Weiter sei σ eine C^∞-Funktion auf U^*, für die gilt:

$$\sigma(x) = \tau(x) \qquad \text{für} \quad \tau(x) \geqq \varepsilon_1,$$

$$\sigma(x) = \tfrac{5}{4}\varepsilon_1 \qquad \text{für} \quad \tau(x) \leqq \tfrac{5}{4}\varepsilon_1,$$

$$\tfrac{5}{4}\varepsilon_1 \leqq \sigma(x) = h(\tau(x)) \leqq \varepsilon_1 \quad \text{für } \tfrac{5}{4}\varepsilon_1 \leqq \tau(x) \leqq \varepsilon_1,$$

wobei $h(t)$ eine monotone Funktion ist. Für $(x,y) \in U^* \times G$ setzen wir nun

$$\psi(x,y) = f\left(2 - 3\,\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}\right).$$

Offenbar ist ψ unendlich oft differenzierbar und $\equiv 1$ in einer Umgebung von $\partial G \times G$ in $U^* \times G$. Ist $(x,y) \in N$, so ist nach Hilfssatz 4 stets $\tau(x) \leqq \tau(y)$ und daher auch $\sigma(x) \leqq \sigma(y)$, d.h.

$$\psi(x,y) = f\left(2 - 3\,\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}\right) \leqq f(-1) = 0.$$

Für $\tau(x) \leqq \varepsilon_1$ und damit auch $\sigma(x) \leqq \varepsilon_1$ ist

$$2 - 3\,\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} \leqq 2 - 3\,\frac{\varepsilon_1}{\frac{5}{4}\varepsilon_1} = -\frac{2}{5},$$

also auch $\psi(x, y) = 0$. Auf $N \cup [(U^* - U) \times G]$ und—wie man sieht—auch noch in einer offenen Umgebung dieser Menge ist $\psi \equiv 0$. Wir haben damit

Hilfssatz 5. *Für $\tau(x)$ und $\tau(y) \geqq \varepsilon_1$ läßt sich die Zusammenziehung ψ in der Form*

$$\psi(x, y) = f\left(2 - 3\frac{\tau(x)}{\tau(y)}\right) \tag{21}$$

wählen.[1]

3. Bezeichnet ξ eine der Veränderlichen x_ν, $\bar{x}_\nu$, so ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = f'(t)\,\frac{\partial t}{\partial \xi} = -3\,\frac{f'(t)}{\tau(y)}\,\frac{\partial \tau}{\partial \xi}. \tag{22}$$

Somit existiert eine (von y unabhängige) Konstante D_1 mit

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right| \leqq f(t)\left|\frac{\partial t}{\partial \xi}\right| \leqq D_1\,\frac{f'(t)}{|\tau(y)|}. \tag{23}$$

Wegen $\psi(y, y) = 0$ folgt hieraus mit einer neuen Konstanten D_2:

$$|\psi(x, y)| \leqq D_2\,\frac{f'(t)}{|\tau(y)|}R. \tag{24}$$

Schließlich kann R_1 so klein angenommen werden, daß, wenn man zu y das Koordinatensystem wie in §2 wählt,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \geqq D_3 > 0 \tag{25}$$

auf $V_{R_1}(y) = \{x : \|x - y\| < R_1\}$ ist.

§4. *Abschätzung des Ramirezschen Kernes*

1. Es sei $\Omega_y(x)$ der gemäß §1 mit den Funktionen $g(x, y)$ und $\psi(x, y)$ aus §2 und §3 gebildete Ramirezsche Kern. Er besteht also aus Summanden der Form

$$\frac{a(x, y)}{g'(x, y)^n}\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{\nu-1} \wedge d\bar{x}_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n,$$

wobei

$$g' = \psi g + (1 - \psi)\,\|x - y\|^2$$

ist und die Funktionen $a(x,y)$ auf $U^* \times G$ unendlich oft differenzierbar sind. Da $\Omega_y(x)$ für festes y in einer Umgebung von y mit dem Bochner-Martinelli-Kern übereinstimmt und für $x \neq y$ regulär ist, existiert

$$(26) \qquad I(y) = \int_G \left| \frac{a(x,y)}{g'(x,y)^n} \right| d\lambda(x), \qquad y \in G$$

($\lambda(x)$ ist das Lebesgue-Maß) und ist auf jedem relativ-kompakten Teil von G eine beschränkte Funktion von y. Wir brauchen $I(y)$ also nur für $y \in U \cap G = \{y \in G : \tau(y) > \varepsilon_1\}$ zu untersuchen.

2. Für $y \in U \cap G$ sei $V_y = \{x \in \bar{G} : \|x - y\| < R_1\}$, wobei R_1 die Konstante aus Hilfssatz 3 ist. Ferner sei

$$M = \{(x,y) \in \bar{G} \times G : \|x - y\| \geqq R_1\}.$$

Hilfssatz 6. *Es gibt eine Konstante $L > 0$, so daß für $(x,y) \in M$ stets $|g'(x,y)| \geqq L$ ist.*

Beweis. Wäre das nicht der Fall, so könnte man eine Folge $(x_\nu, y_\nu) \in M$ mit $\lim(x_\nu\ y_\nu) = (x_0, y_0) \in \bar{G} \times \bar{G}$ und $\lim g'(x_\nu\ y_\nu) = 0$ finden. Nach Voraussetzung ist $\|x_0 - y_0\| \geqq R_1 > 0$. Falls y_0 zu G gehört, ist $g'(x_0, y_0) = 0$. Wäre $x_0 \neq y_0$ so hätte man $\psi(x_0, y_0) = 1$ und $g(x_0, y_0) = 0$, d.h. $(x_0, y_0) \in N$ und daher $\psi(x_0, y_0) = 0$: Widerspruch! Für $y_0 \in \partial G$ ist $\lim \psi\,(x_\nu, y_\nu) = 1$, also $g(x_0, y_0) = 0$, im Widerspruch zu $\operatorname{Re} g(x_0, y_0) > 0$.

Für $y \in U \cap G$ zerlegen wir das Integral (26):

$$I(y) = I_1(y) + I_2(y) = \int_{G - V_y} \left| \frac{a(x,y)}{g'(x,y)^n} \right| d\lambda(x) + \int_{V_y} \left| \frac{a(x,y)}{g'(x,y)^n} \right| d\lambda(x)$$

und behandeln zunächst das erste Integral $I_1(y)$.

Nach Hilfssatz 6 ist

$$I_1(y) \leqq \frac{1}{L^n} \int_G |a(x,y)|\, d\lambda(x).$$

Für alle Zähler der Summanden, in denen $\bar{\partial}_x \psi$ nicht auftritt, ist $|a(x,y)|$ eine beschränkte Funktion von x und y und $I_1(y)$ somit beschränkt in y. Es sei nun $y \in U$ fest gewählt und das Koordinatensystem von §2 zugrundegelegt. Nach (23) und der Formel $\bar{\partial}_x \psi \wedge \bar{\partial}_x \psi = 0$ ist mit einer passenden von y unabhängigen Konstanten L_1:

$$(27) \qquad |a(x,y)| \leqq L_1 f'(t) \frac{\partial t}{\partial n},$$

falls in $a(x,y)$ eine Ableitung von ψ als Faktor auftaucht. Wir zerlegen $I_1(y)$ nochmals:

$$I_1(y) \leqq \frac{1}{L^n} \int_{G-U} |a(x,y)|\, d\lambda(x) + \frac{1}{L^n} \int_{G\cap U} |a(x,y)|\, d\lambda(x).$$

Auf $G - U$ ist $a(x, y)$ unabhängig von y beschränkt, somit auch das erste Integral in dieser Formel. Für das zweite Integral gilt nach (27)

$$\frac{1}{L^n} \int_{G\cap U} |a(x,y)|\, d\lambda(x) \leqq \frac{L_1}{L^n} \int_{\partial G} d\sigma(x);$$

daher ist $I_1(y)$ auch in diesem Fall beschränkt, und es bleibt $I_2(y)$ abzuschätzen.

3. Die Funktionen $b(x, y)$, deren $L^1(V_y)$-Norm wir zu berechnen haben, sind (siehe (1), (2), (3)) die Koeffizienten der Differentialformen

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}_1 \cdots \wedge d\bar{x}_{\nu-1} \wedge d\bar{x}_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n$$

(für $\nu = 1, \cdots, n$) in den folgenden 10 Ausdrücken:

(28) $B(x, y) =$

$$\frac{g_1\psi \wedge \bar{\partial}_x\psi \wedge (g_\mu - (\bar{x}_\mu - \bar{y}_\mu)) \wedge \bigwedge\limits_{\kappa\neq 1,\mu} (\psi\bar{\partial}_x g_\kappa + (1-\psi)d\bar{x}_\kappa) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,x)^n},$$

(29) $B(x, y) =$

$$\frac{(1-\psi)(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) \wedge \bar{\partial}_x\psi \wedge (g_\mu - (\bar{x}_\mu - \bar{y}_\mu)) \wedge \bigwedge\limits_{\kappa\neq 1,\mu} (\psi\bar{\partial}_x g_\kappa + (1-\psi)d\bar{x}_\kappa) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(30) $B(x, y) =$

$$\frac{g_\nu\psi \wedge \bar{\partial}_x\psi \wedge (g_1 - (\bar{x}_1 - \bar{y}_1)) \wedge \bigwedge\limits_{\kappa\neq 1,\nu} (\psi\bar{\partial}_x g_\kappa + (1-\psi)d\bar{x}_\kappa) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(31) $B(x, y) =$

$$\frac{(1-\psi)(\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu) \wedge \bar{\partial}_x\psi \wedge (g_1 - (\bar{x}_1 - \bar{y}_1)) \wedge \bigwedge\limits_{\kappa\neq 1,\nu} (\psi\bar{\partial}_x g_\kappa + (1-\psi)d\bar{x}_\kappa) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(32) $B(x, y) =$

$$\frac{g_\nu\psi \wedge \bar{\partial}_x\psi \wedge (g_\mu - (\bar{x}_\mu - \bar{y}_\mu)) \wedge \bigwedge\limits_{\kappa\neq \nu,\mu} (\psi\bar{\partial}_x g_\kappa + (1-\psi)d\bar{x}_\kappa) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(33) $B(x, y) =$

$$\frac{(1-\psi)(\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu) \wedge \bar{\partial}_x\psi — (g_\mu - (\bar{x}_\mu - \bar{y}_\mu)) \wedge \bigwedge\limits_{\kappa = \nu,\mu} (\psi\bar{\partial}_x g_\kappa + (1-\psi)d\bar{x}_\kappa) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(34) $B(x,y) =$

$$\frac{g_1 \psi \wedge \bigwedge\limits_{\mu>1} (\psi \bar{\partial}_x g_\mu + (1-\psi) d\bar{x}_\mu) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(35) $B(x,y) =$

$$\frac{(1-\psi)((\bar{x}_1 - \bar{y}_1) \wedge \bigwedge\limits_{\mu>1} (\psi \bar{\partial}_x g_\mu + (1-\psi) d\bar{x}_\mu) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(36) $B(x,y) =$

$$\frac{g_\nu \psi \wedge \bigwedge\limits_{\mu \neq \nu} (\psi \bar{\partial}_x g_\mu + (1-\psi) d\bar{x}_\mu) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n},$$

(37) $B(x,y) =$

$$\frac{(1-\psi)(\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu) \wedge \bigwedge\limits_{\mu \neq \nu} (\psi \bar{\partial}_x g_\mu + (1-\psi) d\bar{x}_\mu) \wedge \bigwedge\limits_{\lambda} dx_\lambda}{g'(x,y)^n}.$$

Dabei ist $\nu \neq 1$ und außerdem soll $\mu \neq 1$ in den Formeln (28) und (29) sein sowie $\mu \neq 1$, $\mu \neq \nu$ in (32) und (33). Wir setzen $\tau(y) > \varepsilon_1$ und $y \in G$ voraus und wählen das Koordinatensystem wie in §2, Abschnitt 2.[4]

4. Wir schätzen nun die auftretenden Integrale ab.

Zu (28). Es ist nach (23)

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right| \leqq D_1 \frac{f'(t)}{\rho_0}.$$

Ferner gilt für $\mu > 1$

$$g_\mu(y,y) = \phi_\mu(y) = 0$$

(wegen Hilfssatz 1) und daher für eine geeignete Konstante $D_4 > 0$:

$$\left| g_\mu(x,y) \right| \leqq D_4 R. \tag{38}$$

$g'(x,y)^n$ kann mittels (20) abgeschätzt werden. Es ist

$$\begin{aligned} |g'| &\geqq \tfrac{1}{2}(|\operatorname{Re} g'| + |\operatorname{Im} g'|) \\ &= \tfrac{1}{2}(|\psi \operatorname{Re} g + (1-\psi)\|x-y\|^2| + \psi |\operatorname{Im} g|). \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re} g \geqq 0$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} |g'| &= \tfrac{1}{2}(\psi(|\operatorname{Re} g| + |\operatorname{Im} g|) + (1-\psi)\|x-y\|^2) \\ &\geqq \tfrac{1}{2}(\psi |g| + (1-\psi)\|x-y\|^2). \end{aligned}$$

Daher wird

$$
\begin{aligned}
|g'(x,y)|^n &= |\psi g + (1-\psi)\|x-y\|^2|^n \\
&\geqq \frac{1}{2^n}|\psi(C_2R^2 + C_3|x_1''|) + (1-\psi)R^2|^n \\
&\geqq C_4|\psi R^2 + \psi|x_1''| + (1-\psi)R^2|^n \text{ (mit } C_4 > 0) \\
&= C_4|\psi|x_1''| + R^2|^n \\
&\geqq C_4(R^{2n} + R^{2n-2}\psi|x_1''|). \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung (31) ist nur im Bereich $\rho \geqq 0$ gültig, aber auch nur dort ist $\bar{\partial}_x\psi \neq 0$. Wir setzen $V_y' = V_y \cap \{x : \bar{\partial}\psi \neq 0\}$ und erhalten für die in (28) auftauchenden Funktionen $b(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{V_y} |b(x,y)|\, d\lambda(x) &= \int_{V'_y} |b(x,y)|\, d\lambda(x) \\
&\leqq E_1 \int_{V'_y} \frac{f'(t)}{\rho_0} \frac{R}{R^{2n} + R^{2n-2}\psi|x_1''|} d\lambda(x) \\
&= E_1 \int_{V'_y} \frac{f'(t)}{\rho_0} \frac{1}{R^{2n-1} + R^{2n-3}\psi|x_1''|} d\lambda(x)
\end{aligned}
$$

mit einer Konstanten E_1.

Der Fall $n = 1$ kann im folgenden unberücksichtigt bleiben. Bezeichnet r wieder die euklidische Norm im Raum $\mathbf{R}^{2n-1}$ der Veränderlichen $x_1'', x_2', \cdots, x_n''$, so ist also

$$
\int_{V_y} |b(x,y)|\, d\lambda(x) \leqq E_1 \int_{V'_y} \frac{f'(t)}{\rho_0} \frac{1}{r^{2n-1} + r^{2n-3}\psi|x_1''|}\, d\lambda(x). \qquad (40)
$$

Wir nehmen in diesem Integral die Substitution $\Phi: s = \psi(x,y)$ für x_1' vor und erhalten nach (22) und (25) für die Funktionaldeterminante

$$
|J_\Phi| \leqq D_5 \frac{\rho_0}{f'(t)}, \text{ mit einer Konstanten } D_5.
$$

Damit wird (E_2 ist eine neue Konstante)

$$
\int_{V_y} |b(x,y)|\, d\lambda(x) \leqq E_2 \int_{V''_y} \frac{d\lambda(x)}{r^{2n-1} + r^{2n-3} s|x_1''|}; \qquad (41)
$$

dabei ist $V_y'' \subset \{(x_1'', x_2', \cdots, x_n''): r \leqq R_1\} \times \{s : 0 \leqq s \leqq 1\}$. Am Schluß des Paragraphen zeigen wir die Beziehung

(42) $$\int_0^1 ds \int_{r \leqq R_1} \frac{dx_1'' dx_2' \cdots dx_n''}{r^{2n-1} + r^{2n-3} s \,|x_1''|} = E_3 < \infty .$$

Nach (41) und (42) ist $\int_{V_y} |b(x, y)| \, d\lambda(x)$ also in y beschränkt.

Zu (29). Die in den Summanden auftretenden Zähler lassen sich durch

(43) $$D_6 \frac{f'(t)}{\rho_0} R^2$$

abschätzen; damit kann man wie in (28) vorgehen, wobei sich die Rechnungen wegen der höheren Potenz von R in (43) noch etwas vereinfachen.

Zu (30). Wegen (38) ist dasselbe Verfahen wie in (28) anwendbar.

Zu (31). Es ist

(44) $$|\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu| \leqq R,$$

und deshalb bleiben auch in diesem Fall die Überlegungen zu (28) gültig.

Zu (32) und (33). Nach (38) und (44) kann man wie in (29) vorgehen.

5. Zu (34). Wir brauchen nur über $V_y \cap \{x : \psi(x, y) \neq 0\}$ zu integrieren und können dort für $g'(x, y)$ die Abschätzung (39) verwenden. Für den Zähler gilt (24):

$$|\psi(x, y)| \leqq D_2 \frac{f'(t)}{\rho_0} R .$$

Wir zerlegen

(45) $$\int_{V_y} |b(x, y)| \, d\lambda(x) = \int_{V'_y} |b(x, y)| \, d\lambda(x) + \int_{V''_y} |b(x, y)| \, d\lambda(x),$$

wobei $V_y' = \{x \in V_y : \bar{\partial}_x \psi \neq 0\}$ und $V_y'' = \{x \in V_y : \psi = 1\}$ ist. (Die Funktion f war zwischen 0 und 1 ja als streng monoton vorausgesetzt worden.) Behandeln wir zunächst das erste Integral!

$$\int_{V'_y} |b(x, y)| \, d\lambda(x) \leqq E_4 \int_{V'_y} \frac{f'(t)}{\rho_0} \frac{R}{R^{2n} + R^{2n-2} \psi \,|x_1''|} \, d\lambda(x).$$

Jetzt kann man wie im Fall (28) vorgehen, um die Beschränktheit in y einzusehen. Für das zweite Integral in (45) gilt nach (39):

$$\int_{V''_y} |b(x, y)| \, d\lambda(x) \leqq E_5 \int_{V''_y} \frac{d\lambda(x)}{R^{2n} + R^{2n-2} |x_1''|}$$

(46) $$\leqq E_5 \int_{B_{R_1}} \frac{d\lambda(x)}{R^{2n} + R^{2n-2} |x_1''|},$$

wobei B_{R_1} die Kugel vom Radius R_1 um 0 im $\boldsymbol{R}^{2n}$ und R die euklidische

Norm bezeichnet. Die Existenz von (46) zeigen wir später und haben damit auch den Fall (34) erledigt.

Zu (35). Auf ganz V_y gilt (für $\psi \neq 0$ nach (20), für $\psi = 0$ trivialerweise)

$$|g'(x,y)|^n \geqq C_5 R^{2n}$$

und somit wegen $|\bar{x}_1 - \bar{y}_1| \leqq R$:

$$\int_{V_y} |b(x,y)|\, d\lambda(x) \leqq E_6 \int \frac{d\lambda(x)}{R^{2n-1}} \leqq E_7 < \infty .$$

Zu (36). Wegen (38) kann man wie in (35) vorgehen.

Zu (37). Wegen $|\bar{x}_\nu - \bar{y}_\nu| \leqq R$ ist das Verfahren (35) wieder anwendbar.

6. Es bleiben die Integrale (42) und (46) zu untersuchen.

Zu (42). Man führt Polarkoordinaten im $\mathbf{R}^{2n-1}$ ein und setzt $x_1'' = r \sin\alpha$. Führt man die Integrationen über die im Integranden nicht auftauchenden Winkel aus, so bleibt schließlich die Existenz von

$$I = \int_0^1 ds \int_0^{R_1} dr \int_0^{\pi/2} d\alpha \, \frac{\cos\alpha}{r + s \cdot \sin\alpha}$$

nachzuweisen. Es ist

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 ds \int_0^{\pi/2} d\alpha \cos\alpha \log\left(1 + \frac{R_1}{s \cdot \sin\alpha}\right) \\ &= \int_0^1 ds \int_0^1 du \log\left(1 + \frac{R_1}{s \cdot u}\right) \\ &= \int_0^1 ds \left[\log\left(1 + \frac{R_1}{s}\right) + \frac{R_1}{s}\log\left(1 + \frac{s}{R_1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Die Existenz dieses Integrals ergibt sich aus [*1*, p. 112, Formel 7b] und [*1*, p. 113, Formel 12b] sowie aus der folgenden Abschätzung für das Integral (46).

Zu (46). Einführung von Polarkoordinaten liefert das Integral

$$\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{R_1} \frac{\cos\alpha}{R + \sin\alpha} dR = \int_0^{R_1} \log\left(1 + \frac{1}{R}\right) dR;$$

setzt man $du = 1/R$, so bleibt

$$\int_{1/R_1}^{\infty} \frac{\log(1+u)}{u^2} du$$

zu berechnen; dieses Integral existiert offensichtlich.

7. Wir haben damit

Satz 3. *Zu jedem streng pseudokonvexen Gebiet G mit C^∞-Rand ∂G existiert eine Doppelform (vom Typ $(n, n-1)$ in x, vom Typ $(0,0)$ in y) $\Omega_y(x)$ (mit $x \in G$, $y \in G$) mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Ω ist für $x \neq y$ unendlich oft differenzierbar, mit $d_x \Omega_y(x) = 0$.*

b) *$\bar{\partial}_y \Omega_y(x) = 0$ im einer Umgebung W von $\partial G \times G$ (in $\bar{G} \times G$).*

c) *Es gibt eine Konstante $K < \infty$, so daß für jeden Koeffizienten $b(x, y)$ der in $\Omega_y(x)$ auftretenden Monome*

$$\int_G |b(x,y)| \, d\lambda(x) \leqq K$$

ist.

d) *Ist f holomorph auf $\bar{G}$, so gilt für $y \in G$:*

$$f(y) = \int_{\partial G} f(x) \Omega_y(x).$$

§5. *Die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$*

1. Es sei G wie früher ein streng pseudokonvexes Gebiet mit C^∞-Rand und $\Omega_y(x)$ ein Kern mit den Eigenschaften von Satz 2. Ferner sei G' ein relativ-kompaktes Teilgebiet von G mit glattem Rand $\partial G'$ und f eine C^∞-Funktion auf $\overline{G'}$. Für $y \in G'$ bezeichne $B_r(y)$ eine Kugel vom Radius r um y mit $B_r(y) \subset\subset G'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{G'} \bar{\partial}_x f(x) \wedge \Omega_y(x) &= \int_{G'} d_x(f \Omega_y(x)) \\
&= \int_{B_r(y)} d_x(f\Omega_y(x)) + \int_{G' - B(y)} d_x(f\Omega_y(x)) \\
&= \int_{B_r(y)} d_x(f\Omega_y(x)) + \int_{\partial G'} f\Omega_y(x) - \int_{\partial B_r(y)} f\Omega_y(x).
\end{aligned}$$

Für $r \to 0$ strebt das erste Integral gegen 0, das letzte gegen $f(y)$, und wir haben

$$f(y) = -\int_{G'} \bar{\partial}_x f(x) \wedge \Omega_y(x) + \int_{\partial G'} f(x) \Omega_y(x) \tag{47}$$

für $y \in G'$ und f beliebig oft differenzierbar auf $\overline{G'}$.

2. Wir setzen für eine C^∞-Form vom Typ $(0,1)$

$$\alpha = \sum \alpha_\nu(x) d\bar{x}_\nu,$$

$$|\alpha| = \max_\nu \sup_{x \in G} |\alpha_\nu(x)|,$$

und für Funktionen f

$$|f| = \sup_{x \in G} |f(x)|.$$

Dann gilt

Satz 4. *Zu jedem streng pseudokonvexen Gebiet G mit C^∞-Rand existiert eine Konstante $K < \infty$ mit folgender Eigenschaft: Ist α eine $\bar{\partial}$-geschlossene C^∞-Form vom Typ $(0,1)$, so gibt es eine C^∞-Function f mit $\bar{\partial} f = \alpha$ und $|f| \leqq K|\alpha|$·*

Beweis. Wir dürfen $|\alpha| < \infty$ annehmen. Da G pseudokonvex ist, existiert jedenfalls eine C^∞-Funktion g mit $\bar{\partial} g = \alpha$. Es sei nun $G_1 \subset\subset G_2 \subset\subset ..$ eine Folge relativ-kompakter Teilgebiete von G mit glattem Rand, so daß $G = \bigcup G_\nu$ ist. Zu $y_0 \in G$ wählen wir eine relativ-kompakte Umgebung $V \subset\subset G$ und ein ν_0, so daß der Kern $\Omega_y(x)$ aus Satz 3 holomorph in $y \in V$ für $x \notin G_{\nu_0}$ ist und $V \subset\subset G_{\nu_0}$ gilt. Dann ist nach (47) für $\nu \geqq \nu_0$:

$$g(y) = \int_{\partial G_\nu} g(x)\Omega_y(x) - \int_{G_\nu} \bar{\partial} g(x) \wedge \Omega_y(x). \tag{48}$$

Wir setzen

$$f_\nu(y) = -\int_{G_\nu} \alpha(x) \wedge \Omega_y(x)$$

und

$$f(y) = -\int_G \alpha(x) \wedge \Omega_y(x).$$

Nach (48) ist in V:

$$g(y) = \int_{\partial G_\nu} g(x)\Omega_y(x) + f_\nu(y);$$

mit g und $\int_{\partial G_\nu} g(x)\Omega_y(x)$ ist dann auch f_ν eine C^∞-Funktion. Ferner ist

$$f(y) - f_\nu(y) = -\int_{G - G_\nu} \alpha(x) \wedge \Omega_y(x),$$

und diese Folge konvergiert auf V gleichmäßig gegen 0:

$$\lim f_\nu(y) = f(y).$$

Ist η irgendeine Variable des $\boldsymbol{R}^{2n}$, so ist

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(f_\nu(y) - f_\mu(y)) = -\frac{\partial}{\partial\eta}\int_{G_\nu - G_\mu} \alpha(x) \wedge \Omega_y(x).$$

$$= -\int_{G_\nu - G_\mu} \alpha(x) \wedge \frac{\partial}{\partial\eta}\Omega_y(x).$$

Der Integrand ist auf $G - G_{\nu_0}$ gleichmäßig in $y(\in V)$ beschränkt, demnach konvergiert die Folge $\partial f_\nu/\partial\eta$ lokal gleichmäßig. Gleiches gilt für die höheren Ableitungen. Somit ist f eine C^∞-Funktion,[2] und man hat

$$\bar\partial f = \lim \bar\partial f_\nu = \bar\partial g = \alpha,$$

da das erste Integral in (48) holomorph von y abhängt. Die Abschätzung $|f| \leqq K|\alpha|$ mit von α unabhängigem K ergibt sich trivial aus Satz 3.

3. Als Folgerung erhält man eine entsprechende Abschätzung in der Čechschen Kohomologie. Es sei $\hat{\mathfrak{U}} = \{\hat U_1, \cdots, \hat U_r\}$ eine endliche offene Überdeckung von $\bar G$, $\mathfrak{U} = \hat{\mathfrak{U}} \cap G = \{U_\rho = \hat U_\rho \cap G\}$ und $\mathfrak{c} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ein 1-Cozyklus. Wir definieren

$$|\mathfrak{c}| = \max_{i,j} |\mathfrak{c}_{ij}|,$$

$$|\mathfrak{c}_{ij}| = \sup_{x \in U_i \cap U_j} |\mathfrak{c}_{ij}(x)|;$$

analog sei $|\mathfrak{c}|$ für 0-Coketten erklärt. Dann gilt

Satz 5. *Es gibt eine Konstante $K < \infty$, so daß zu jedem $\mathfrak{c} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ eine 0-Cokette $\mathfrak{c}' \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ existiert mit*

$$\delta\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$$

und

$$|\mathfrak{c}'| \leqq K|\mathfrak{c}|.$$

Beweis. Zu $\hat{\mathfrak{U}}$ wählen wir eine $\boldsymbol{C}^\infty$-Teilung $\{\phi_\rho\}$ der 1 mit $0 \leqq \phi_\rho \leqq 1$, $\Sigma\, \phi_\rho = 1$ auf $\bar G$ und $\operatorname{Tr}\phi_\rho \subset \hat U_\rho$. Durch

$$\mathfrak{d}_\rho = \sum_i \phi_i \mathfrak{c}_{\rho i} \text{ und } \mathfrak{d} = \{\mathfrak{d}_\rho\}$$

ist eine differenzierbare 0-Cokette mit $\delta\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ und $|\mathfrak{d}| \leqq |\mathfrak{c}|$ definiert. Wegen

$$\delta\bar\partial\mathfrak{d} = \bar\partial\delta\mathfrak{d} = \bar\partial\mathfrak{c} = 0$$

ist

$$\alpha = \bar\partial\mathfrak{d}$$

eine C^∞-Form vom Typ $(0,1)$ auf G, die offensichtlich $\bar\partial$-geschlossen ist. Außerdem ist

$$|\alpha| \leqq K'|\mathfrak{c}|$$

mit einer nur von $\{\phi_\rho\}$ abhängigen Konstanten K'. Nach Satz 4 existiert eine C^∞-Funktion f mit

$$\bar\partial f = \alpha \text{ und } |f| \leqq K''|\alpha|,$$

wobei K'' nur von G abhängt. Setzt man

$$\mathfrak{c}'_\rho = \mathfrak{d}_\rho - f,$$

so ist

$$\bar\partial\mathfrak{c}'_\rho = \partial\mathfrak{d}_\rho - \bar\partial f = 0,$$

also $\mathfrak{c}' = \{\mathfrak{c}_\rho\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, und

$$\delta\mathfrak{c}' = \delta\mathfrak{d} = \mathfrak{c};$$

schließlich gilt

$$|\mathfrak{c}'| \leqq |\mathfrak{d}| + |f| \leqq |\mathfrak{c}| + K'K''|\mathfrak{c}| \leqq K|\mathfrak{c}|.$$

Damit ist dieser Satz bewiesen.

Satz 4 kann auch angewandt werden, um das folgende lokale Resultat zu erhalten:

Satz 6. *Es sei α eine stetige $\bar\partial$-geschlossene $(0,1)$-Form auf der offenen Menge W im $\mathbf{C}^n$. Dann existiert zu jedem $x_0 \in W$ eine Umgebung U von x_0 in W und eine stetige Funktion f auf U mit $\bar\partial f = \alpha$.*

(Alle Ableitungen sind im Sinne der Distributionstheorie zu verstehen.[3])

Beweis von Satz 6. Es sei $U' \subset\subset W$ eine Umgebung von x_0. Bekanntlich existiert eine Folge von C^∞-Formen α^ν vom Typ $(0,1)$ auf U' mit

$$\alpha = \sum_\nu \alpha^\nu$$

und

$$\bar\partial\alpha_\nu = 0,$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert (Regularisierung, siehe etwa [*6*, pp. 156–157]). Wir wählen eine Kugel U um x_0 mit $\bar U \subset U'$ und wenden Satz 4 an: Es gibt C^∞-Funktionen f_ν auf U mit

$$\bar\partial f_\nu = \alpha^\nu$$

und

$$|f_\nu| \leqq K|\alpha^\nu|,$$

wobei K nicht von ν abhängt und die Suprema $|f_\nu|$ bzw. $|\alpha^\nu|$ über U zu bilden sind. Demnach ist

$$f = \sum_\nu f_\nu$$

eine stetige Funktion auf U, und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ folgt nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz aus der Definition von $\bar{\partial} f$.

4. Als letztes untersuchen wir die Abhängigkeit der Konstanten K vom Gebiet G. Die Randfunktionen ϕ sei wie in §2 gewählt, und für hinreichend kleines $|\varepsilon|$ bezeichne G_ε das durch $\phi(x) < \varepsilon$ definierte streng pseudokonvexe Gebiet. Die zugehörigen Kerne seien $\Omega_y^\varepsilon(x)$, gebildet aus den Funktionen $g_\varepsilon(x, y)$ bzw. $\psi_\varepsilon(x, y)$. Nach Hilfssatz 4 ist aber klar, daß man

$$g_\varepsilon(x, y) = g(x, y)$$

erreichen kann (für genügend kleines ε). Bezeichnet τ_ε die entsprechend τ zu G_ε gebildete Distanzfunktion, so darf man

$$\psi_\varepsilon(x, y) = f\left(2 - 3\,\frac{\tau_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon(y)}\right)$$

für $\tau_\varepsilon(x)$, $\tau_\varepsilon(y) > \delta$ annehmen; dabei ist $\delta < 0$ und unabhängig von ε wählbar (vgl. Hilfssatz 5). Aus dieser Darstellung folgt, daß alle in den §§2–4 verwandten Konstanten unabhängig von ε wählbar sind, und damit auch die Konstante K aus Satz 4 oder 5.

Auch wenn ϕ nicht so speziell gewählt wird, läßt sich durch eine etwas kompliziertere Überlegung die Unabhängigkeit der Konstanten K von den durch $\phi < \varepsilon$ definierten Gebieten zeigen.

ANMERKUNGEN

1. Es ist auf einem etwas komplizierteren Wege auch möglich, ψ so zu wählen, daß das Ramirezsche Integral für $y \in \partial G$ nur in $x = y$ eine Singularität bekommt (und nicht in ganz ∂G wie hier).
2. Falls α n-mal stetig differenzierbar ist, so ist auch f n-mal stetig differenzierbar.
3. Mit α ist natürlich auch f von der Klasse C^r, und die Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ gilt im gewöhnlichen Sinn.
4. Wir nutzen aus, daß sich das Funktionensystem $(g_1, \ldots, g_n)$ unter holomorphen linearen Transformationen wie eine $(1, 0)$-Form verhält.

LITERATUR

[*1*] GRÖBNER, W. UND N. HOFREITER, Integraltafeln (Erster Teil), Wien usw. (1957).

[2] GUNNING, R. C. UND H. ROSSI, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1965).

[3] LERAY, J., Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe ((Problème de Cauchy, III), Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 81–180.

[4] NORGUET, F., Problèmes sur les formes differentielles et les courants, Ann. Inst. Fourier **11** (1961), 1–82.

[5] RAMÍREZ DE ARELLANO, E., Ein Divisionsproblem in der komplexen Analysis mit einer Anwendung auf Randintegraldarstellungen, Math. Ann. **184** (1970), 172–187.

[6] YOSIDA, K., Functional Analysis, Berlin usw. (1965).

UNIVERSITY OF GÖTTINGEN